Chapter 1　What is Combinatorics?

若說有人從未解過 a combinatorial problem, 那應該是不太可能的!
像: n 個球隊, 兩兩都要比賽, 需比幾場?
建 magic squares（魔方陣）, 一筆劃, …都是 combinatorial problems.

Combinatorics 和 mathematical recreations 及 games 很有關.
現在, combinatorics 是數學中重要的一支. 它之所以發展快速, 原因是:
電腦的使用普及以及使用方便, 以及 combinatorics 在許多的領域中都出現了應用.

Combinatorics is concerned with *arrangements of objects of a set into patterns satisfying specified rules*.

有兩類問題常被考慮到:

- **Existence of the arrangement.**（某種排列的存在性）
  某種 arrangement 是否存在?
  若不一定存在, 在什麼情況下會存在, necessary and sufficient conditions 是什麼?
- **Enumeration or classification of the arrangements.**（將排列列舉或分類）
  若 arrangements 存在, 有幾種方法可達成它? 可以分類嘛?

根據經驗, 若前者已經很難, 後者就更不用說了.
我們希望能學習到一些方法, 直接列出 the number of arrangements,
而不必先將 arrangements 一一列出.

此外還有兩類問題也常被考慮到:

- Study of a known arrangement.
- Construction of an optimal arrangement.

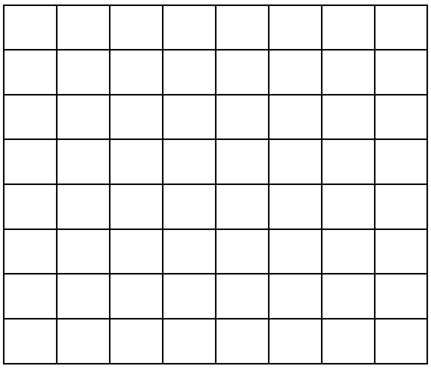
Combinatorics is concerned with *the existence*, *enumeration*, *analysis, and optimization of discrete structures*.

我們不敢說 there are general principles or methods 來解 combinatorial problems.
但　mathematical induction (數學歸納法), inclusion-exclusion principle (容斥原理),
pigeonhole principle (鴿籠原理), recurrence relations (遞迴關係),
generating functions (生成函數), Burnside's theorem,
Polya's counting formula … 等的學習都會有用.

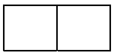
在「離散數學」這門課中, 我們會學習這些.
經驗當然也是很重要的.
The more problems one solves, the more likely one is able to solve the next problems.
書上介紹 7 個例子, 讓大家感受一下什麼是 combinatorial problems.

1.1 Example: Perfect Cover of Chessboards (棋盤的完美覆蓋)

今有一個 8×8 的棋盤，和 32 個完全相同的 dominoes，每個 domino 佔棋盤上的兩格.



the chessboard



a domino (可橫放或直放)

<u>問題 1</u>. 可否將 32 個 dominoes 排在棋盤上，滿足:

1. no two dominoes overlap,
2. every domino covers 2 squares, and
3. all the squares of the chessboard are covered?

存在嗎?

符合這 3 個條件的覆蓋方法，叫做 a **perfect cover**（完美覆蓋）或 **tiling**.
對 8×8 的棋盤而言, perfect cover 不但存在，而且還很多呢!

有幾個?

<u>問題 2.</u> 有多少種 different perfect covers?
這就有點難了! 但 Fischer 在 1961 年，證出有 $12{,}988{,}816 = 2^4 \times 17^2 \times 53^2$ 種.

推廣

<u>問題 3.</u> 將 8×8 的棋盤改成是 $m\times n$ 的棋盤. 問: 那些 m 和 n 會有 a perfect cover?
你可以試一試, 3×3 的棋盤沒有 a perfect cover. 可以證出:

$m\times n$ 的棋盤有 a perfect cover if and only if at least one of m and n is even.

換句話說，棋盤中的格子數是偶數時就有.

變型

<u>問題 4.</u> 回到 8×8 的棋盤，將左上角和右下角這兩個格子拿掉.
問: 是否仍有 a perfect cover?
答案是: 沒有! 但，如何證明「不論怎麼安排 dominoes，都不會有 a perfect cover」呢? 畢竟排法有很多種啊! 有人提出了 a simple and clever 的證法喔!
首先將棋盤塗成黑白交錯出現的形式,
以 B 表黑，以 W 表白，故有 32B 和 32W.
此時左上角和右下角被塗了同色,
不失其一般性，設它們都被塗了 W.
<u>拿掉左上角和右下角後，剩下 32B 和 30W.</u>
<u>然而一個 domino 必定是 cover 1B and 1W.</u>
由於 **31B + 31W ≠ 32B + 30W**,
因此不存在 a perfect cover.

W	B	W	B	W	B	W	B
B	W	B	W	B	W	B	W
W	B	W	B	W	B	W	B
B	W	B	W	B	W	B	W
W	B	W	B	W	B	W	B
B	W	B	W	B	W	B	W
W	B	W	B	W	B	W	B
B	W	B	W	B	W	B	W

問題 5. 將 8×8 棋盤推廣成 $m \times n$ 棋盤. 也將棋盤塗成「黑白交錯出現」的形式, 拿掉一些格子. 問: 什麼情形下會存在 a perfect cover?
我們由問題 4 的討論過程中, 已經知道拿掉的 B 和 W 要一樣多.
然而 Figure1.1 中的例子也告訴我們: **This is not sufficient!**
拿掉的 B 和 W 等多並不足以保證會存在 a perfect cover.

推廣、變型之下，存在嗎?

W	×	W	B	W
×	W	B	×	B
W	B	×	B	W
B	W	B	W	B

What are the necessary and sufficient conditions?

將 domino 推廣成 b-omino. A 1-omino is called a monomino.

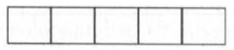


Figure 1.2. A 5-omino

以下推廣 perfect cover 的定義到 $m \times n$ 的棋盤和 b-ominoes.

問題 6. When does an $m \times n$ board have a perfect cover by b-ominoes?
$b|mn$ is a necessary condition 必要條件.
$b|m$ or $b|n$ is a sufficient condition 充分條件.
可以導出 necessary and sufficient conditions 充分必要條件嗎?

推廣之下，存在的條件?

會發生「$b \nmid m$, $b \nmid n$, $b|mn$, and a perfect cover exists」的情形嗎? **(*)**

以下我們將證明**(*)**不可能發生!
Proof. 將 m 寫成 $m = pb + r$, where $0 \leqq r \leqq b-1$,
將 n 寫成 $n = qb + s$, where $0 \leqq s \leqq b-1$. (1)
我們可藉由「旋轉棋盤」而使得 $r \leqq s$.
(ps. 不這麼做也可以, 只是討論時, 連 $r > s$ 的情形也要討論到.)
依 Figure1.3 (如下)的塗法, 將整個 $m \times n$ 棋盤用顏色 1, 2, ..., b 塗好.

1	2	3	…	b-1	b
b	1	2	…	b-2	b-1
b-1	b	1	…	b-3	b-2
…					
…					
2	3	4	…	b	1

例如: $m = 15$, $n = 16$, $b = 6$ 時, 有 $p = 2$, $r = 3$, $q = 2$, $s = 4$.
這種塗法使得：無論你將 b-omino 放在棋盤中的那個位置上,
color 1, color 2, …, color b 都恰用了一次.

1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4
6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4
6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4
6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2

<u>因此, 若存在 a perfect cover, 則每個顏色會被塗相同多次.</u>
將棋盤分成 3 部分來檢查:

1. 最上方的 $pb \times n$ 個格子, 每個顏色都出現相同多次, 都是 pn 次.
2. 下左方的 $r \times qb$ 個格子, 每個顏色都出現相同多次, 都是 rq 次.
3. 下右方的 $r \times s$ 個格子, 若存在 a perfect cover,
   則每個顏色在下右方 $r \times s$ 個格子中會被塗相同多次.
   由於 $r \leqq s$, 我們的塗色方式會使 color 1 occurs once in each row of the $r \times s$ part.
   因此 color 1 出現了 r 次.
   所以, 若是存在 a perfect cover, 則 each of colors 2, 3, …, b 也都要出現 r 次.
   所以 $\underbrace{rs}_{\text{格子數}} = \underbrace{rb}_{b\text{個顏色每個顏色都該出現}r\text{次}}$ 必須成立!
   若 $r \neq 0$, 則 $s = b$; 此與 (1) 中的 $s \leqq b - 1$ 矛盾. 故 $r = 0$, 換句話說, $b|m$.
   由此上, (*)不可能. □

<u>結論</u>. An $m \times n$ board has a perfect cover by b-ominoes if and only if $b|m$ or $b|n$.

A perfect cover is **trivial** if all the b-ominoes are horizontal or all the b-ominoes are vertical.
上面的結論又可寫為:
An $m \times n$ board has a perfect cover by b-ominoes if and only if it has a <u>trivial</u> perfect cover.

<u>問</u>: 書上 Figure 1.4 的例子 $m = 10$, $n = 11$, $b = 4$,
不滿足「b 不能整除 m, b 不能整除 n, $b|mn$」.
<u>答</u>: 書上的例子給的不好, 所以講義重新再給.