11.6 Absolute Convergence and the Ratio and Root Tests

$\underbrace{\text{Absolute Convergence}}$ and the $\underbrace{\text{Ratio and Root Tests}}$

絕對收斂
是指 $\Sigma|a_n|$ 收斂
因為有性質：$\Sigma|a_n|$ 收 $\Rightarrow \Sigma a_n$ 收
因此：絕對收斂 ⇒ 收斂
然而，收斂 ⇏ 絕對收斂
因此有所謂的"條件收斂"
是指 Σa_n 收，但 $\Sigma|a_n|$ 發

它們是最後兩種"正項級數"的檢驗法，
檢驗 Σa_n 收/發
由於 $\Sigma|a_n|$ 是正項級數，
這兩種檢驗法也常被用來檢驗"絕對收斂"。

1 Def. Σa_n is absolutely convergent (絕對收斂) if $\Sigma|a_n|$ is convergent.

2 Def. Σa_n is conditionally convergent (條件收斂) if it is convergent but not absolutely convergent.
Σa_n 收，但是 $\Sigma|a_n|$ 發

3 Thm. If Σa_n is absolutely convergent, then it is convergent.
絕對收斂 ⇒ 收斂
$\Sigma|a_n|$ 收斂 ⇒ Σa_n 收斂

※ Proof. Note that $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$ for all n.
Suppose Σa_n is 絕收.
Then $\Sigma|a_n|$ 收 and hence $\Sigma 2|a_n|$ 收.
By the Comparison Test, $\Sigma(a_n+|a_n|)$ 收.
Since $\Sigma(a_n+|a_n|)$ 收 and $\Sigma|a_n|$ 收, $\Sigma(a_n+|a_n|-|a_n|)$ 收.
Since $\Sigma a_n = \Sigma(a_n+|a_n|-|a_n|)$, Σa_n 收. ☒

我們只有：$\Sigma|a_n|$ 收 $\Rightarrow \Sigma a_n$ 收
我們沒有：Σa_n 收 $\Rightarrow \Sigma|a_n|$ 收

例1. alternating harmonic series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收，但是 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 發.

若是 Σa_n 收，而 $\Sigma|a_n|$ 發，我們就稱 Σa_n 為 conditionally convergent.

例1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ absolutely convergent?

Sol. $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is a p-series with $p=2$.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right|$ is convergent.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ is absolutely convergent. ☒

☆例3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ convergent or divergent? 不是"正項級數"
也不是"交錯級數"
∴考慮加上| |來檢驗.

Sol. $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|$ is a series with non-negative terms. (正項級數)

$\because 0 \le \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \frac{|\cos n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$ for all n and $\sum \frac{1}{n^2}$ is convergent

$\therefore$ By Comparison Test, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|$ is also convergent.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ is convergent. ☒

當 $\sum a_n$ 不是"正項級數",也不是"交錯級數",也沒發生 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 不存在 or $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$, 則考慮用 $\sum |a_n|$ 來檢驗. $\sum |a_n|$ 是"正項級數", 可以使用"正項級數"的那5種檢驗法.

IIII 正項級數的第4種檢驗法

The Root Test (根值檢驗法)

Suppose $\sum a_n$ is a series with non-negative terms.

(i) If $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, then $\sum a_n$ is convergent.

(ii) If $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1$ or $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$, then $\sum a_n$ is divergent.

(iii) If $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, then Root Test is inconclusive (判斷不出來).

例6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^n$ convergent or divergent?

Sol. $\because \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3} < 1$. ∴ By Root Test, 收斂. ☒

自己: $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$?　Ans. 收斂

$\sum \frac{2^n}{n^3}$?　Ans. 發散

課本的 The Root Test （將 $\sqrt[n]{a_n}$ 都改成 $\sqrt[n]{|a_n|}$）

(i) If $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, then $\sum a_n$ is absolutely convergent (and therefore convergent).

(ii) If $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ or $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, then $\sum a_n$ is divergent.

(iii) If $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, then Root Test is inconclusive.

IIII 正項級數的第5種檢驗法

The Ratio Test (比值檢驗法)

Suppose $\sum a_n$ is a series with positive terms. 必須 $a_n>0$ $\forall n$

(i) If $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, then $\sum a_n$ is convergent.

(ii) If $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1$ or $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, then $\sum a_n$ is divergent.

(iii) If $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, then Ratio Test is inconclusive.

關於(iii): $\sum \frac{1}{n^2}$ 滿足 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} = 1$,

$\sum \frac{1}{n}$ 也滿足 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$,

可是 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收斂、$\sum \frac{1}{n}$ 卻發散. $\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ 時判斷不出來.

例14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ absolutely convergent?

Sol. Consider $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n^3}{3^n} \right|$, i.e., $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$.

$$\because \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^3}{n^3}\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^3}{1}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

$\therefore$ By Ratio Test, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$ 收斂. Hence $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{3^n}$ 絕對收斂. ☒

例15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ convergent or divergent?

Sol. $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e > 1$

$\therefore$ By Ratio Test, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ is divergent. ☒

另解. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n} = \infty$. $\therefore$ divergent ☒

課本的 The Ratio Test (將 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 都改成 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$)

(i) If $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, then $\sum a_n$ is absolutely convergent (and therefore convergent).

(ii) If $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ or $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, then $\sum a_n$ is divergent.

(iii) If $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, then Ratio Test is inconclusive.

IIII Rearrangements (重排)

A rearrangement of a series $\sum a_n$ is a series obtained by changing the order of terms. (項都一樣, 但是次序可能改變了)

例如: $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$ is a rearrangement of $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots$.

Riemann 証明了:

- If $\sum a_n$ is an absolutely convergent series with sum s, then any rearrangement of $\sum a_n$ has the same sum s.

- If Σa_n is conditionally convergent, then for any real r, there exists a rearrangement of Σa_n that has a sum equal to r.

★ 11.5 習36. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots=\ln 2$ —①

①×$\frac{1}{2}$得: $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\ln 2$

插入0: $0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\ln 2$ —②

由①和②: $1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}\ln 2$

$\therefore \underbrace{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}_{\text{兩個正一個負}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}}_{\text{兩個正一個負}}+\cdots=\frac{3}{2}\ln 2$ —③ …

①和③的項都完全一樣, 但是sums卻不相同.

補充: 有4種可能

1. Σa_n 收、且 $\Sigma|a_n|$ 收, 這是"絕對收斂"
2. Σa_n 收、且 $\Sigma|a_n|$ 發, 這是"條件收斂"
3. Σa_n 發、且 $\Sigma|a_n|$ 收, 這不可能
4. Σa_n 發、且 $\Sigma|a_n|$ 發, 這有可能, 例如: $\Sigma(-1)^{n-1}$.

注意: 只有 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=0$

沒有別的, 例如: 沒有 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=1$ 常見錯誤

HW 全都自己做不必交 1, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31.

TEST #9 (滿分為 100 分) 系別：________ 學號：________ 姓名：________

滿分 ：9 人 XXX、XXX、XXX、XXX、XXX
XXX、XXX、XXX、XXX

90~99 : 18 人
80~89 : 10 人
70~79 : 7 人
60~69 : 5 人
50~59 : 3 人
40~49 : 3 人
30~39 : 1 人
20~29 : 1 人 以上共 57 人考試； 3 人缺考 (XXX, XXX, XXX)

1. (20 分) Find $\int \frac{\sin x}{1-\sin^2 x} dx$. Note: $\sin^2 x$ means $(\sin x)^2$.

20 分：33 人 15~19 分：15 人 10~14 分：0 人 5~9 分：1 人 0~4 分：8 人

正確答案為 $\sec x + C$

$$\int \frac{\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x \cdot 1}{\cos x \cdot \cos x} dx = \int \tan x \cdot \sec x dx = \sec x + C$$

或 Let $u = \cos x \Rightarrow \int -\frac{1}{u^2} du = \frac{1}{u} + C = \sec x + c$

- 不定積分最後結果要寫「+C」，沒寫 +C 扣兩分
- 有同學以為 $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$ XXX

2. (20 分) Evaluate $\int \frac{1+4x}{\sqrt{1+x+2x^2}} dx$.

20 分：36 人 15~19 分：15 人 10~14 分：0 人 5~9 分：2 人 0~4 分：4 人

正確答案為 $2\sqrt{1+x+2x^2} + C$

Let $u = 1 + x + x^2$
$du = (1+4x)dx$

原式 $= \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{1+x+2x^2} + C$

- 沒寫 +C 扣兩分
- 有同學以為 $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$ XXX、XXX、XXX

● 有同學以為 $\int \frac{1}{\sqrt{1+x+2x^2}}dx = \int (1+x+2x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{(1+x+2x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{(1+x+2x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$ XXX

3. (10 分) Evaluate $\int_{-1}^{2}(x-2|x|)\,dx$.

10 分：50 人　　5~9 分： 5 人　　1~4 分：0 人　　0 分：2 人

正確答案為 $-\frac{7}{2}$

考慮 $|x|$ 的 $+\,-$ ，拆成兩部分來積分

原式 $=\int_{-1}^{0}(x+2x)dx+\int_{0}^{2}(x-2x)dx=\left(3\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{2}=-\frac{3}{2}-2=-\frac{7}{2}$

● 有同學以為 $\int |x|\,dx=\frac{1}{2}|x|^2+C$ XXX

4. (10 分) Suppose the velocity of a particle is $v(t)=t-2,\ \ 0\le t\le 3$. Find (a) the displacement and (b) the distance traveled by the particle during the time period.

10 分：36 人　　5~9 分： 11 人　　1~4 分：0 人　　0 分：10 人

正確答案為 $(a)-\frac{3}{2}$　$(b)\frac{5}{2}$

(a) 問的是 displacement (位移)，也就是 終止位置 減去 起始位置 的量

$$\int_0^3 (t-2)dt=\frac{1}{2}t^2-2t\Big|_0^3=\frac{9}{2}-6=-\frac{3}{2}$$

(b) 問的是這個 particle 一路上經過多遠的距離，
因為 particle 在時間 $t=2$ 的時候，往回跑了，所以(b)將不同於(a)的答案

$$\int_0^3|(t-2)|\,dt=\int_0^2-(t-2)dt+\int_2^3(t-2)dt=\left(-\frac{t^2}{2}+2t\right)\Big|_0^2+\left(\frac{t^2}{2}-2t\right)\Big|_2^3=2-0-\frac{3}{2}+2=\frac{5}{2}$$

5. (10 分) Evaluate $\int_0^1 x\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)dx$.

10 分：52 人　　5~9 分： 1 人　　1~4 分：0 人　　0 分：4 人

正確答案為 $\frac{55}{63}$

$$\int_0^1 x\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{4}}\right)dx=\int_0^1 x^{\frac{4}{3}}dx+\int_0^1 x^{\frac{5}{4}}dx=\frac{3}{7}+\frac{4}{9}=\frac{55}{63}$$

6. (10 分) Evaluate $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{x^2\sin x}{1+x^6}dx$.

10 分：28 人　　5~9 分： 12 人　　1~4 分：0 人　　0 分：17 人

正確答案為 0

[1]

Let $u=-x$, then $du=-dx$.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{x^2\sin x}{1+x^6}dx=\int_{-\pi/2}^{0}\frac{x^2\sin x}{1+x^6}dx+\int_{0}^{\pi/2}\frac{x^2\sin x}{1+x^6}dx$$

$$=\int_{-\pi/2}^{0}\frac{x^2\sin x}{1+x^6}dx+\int_{0}^{-\pi/2}\frac{(-u)^2\sin(-u)}{1+(-u)^6}(-1)du=\int_{-\pi/2}^{0}\frac{x^2\sin x}{1+x^6}dx+\int_{0}^{-\pi/2}\frac{u^2\sin(-u)}{1+u^6}(-1)du$$

$$=\int_{-\pi/2}^{0}\frac{x^2\sin x}{1+x^6}dx+\int_{0}^{-\pi/2}\frac{u^2\sin u}{1+u^6}du=\int_{-\pi/2}^{0}\frac{x^2\sin x}{1+x^6}dx+\int_{0}^{-\pi/2}\frac{x^2\sin x}{1+x^6}dx=0$$

[2]

$$\because \frac{(-x)^2\sin(-x)}{1+(-x)^6}=-\frac{x^2\sin x}{1+x^6}$$

$\therefore \frac{x^2\sin x}{1+x^6}$ 是奇函數

Hence 正確答案為 0.

- 寫出正確答案為 0，但是推論 $\frac{x^2\sin x}{1+x^6}$ 是奇函數過程錯誤者，扣五分。

  XXX，XXX，XXX

- 常見的錯法　XXX、XXX、XXX、XXX、XXX、XXX

  $$\because \frac{(-\pi/2)^2\sin(-\pi/2)}{1+(-\pi/2)^6}=-\frac{(\pi/2)^2\sin(\pi/2)}{1+(\pi/2)^6}$$

  $\therefore \frac{x^2\sin x}{1+x^6}$ 是奇函數

7. (10 分) Evaluate $\int_e^{e^4} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$.

10 分：32 人　　5~9 分： 20 人　　1~4 分：0 人　　0 分：5 人

正確答案為 2

Let $u=\ln x$, then $du=\frac{1}{x}dx$. $\int_e^{e^4}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\int_1^4 u^{\frac{-1}{2}}du=\left[2u^{\frac{1}{2}}\right]_1^4=4-2=2$

- x 從 e 積到 e^4 ，u 就從 1 積到 4；錯在表達者扣一分。
  XXX、XXX、XXX、XXX、XXX、XXX、XXX、XXX、XXX
  XXX、XXX、XXX、XXX、XXX

- x 從 e 積到 e^4 ，u 就從 1 積到 4；不僅錯在表達者扣三分。
  XXX，XXX，XXX，XXX

- **定積分不用 + C**，就算寫了 +C，會消掉，最後將會算出一樣的答案，也算對。
  若是寫了 +C，因而造成自己的困擾而算不出答案，扣二分。
  XXX

8. (10 分) If f is continuous and $\int_0^9 f(x)dx=4$, find $\int_0^3 x\,f(x^2)dx$.

10 分：39 人　　5~9 分： 5 人　　1~4 分：0 人　　0 分：13 人

正確答案為 2

Let $u=x^2$, then $du=2xdx$.

$$\int_0^3 xf\left(x^2\right)dx=\int_0^3\frac{1}{2}f\left(x^2\right)\left(2xdx\right)=\int_0^9\frac{1}{2}f\left(u\right)du=\frac{1}{2}\int_0^9 f\left(u\right)du=\frac{1}{2}\int_0^9 f\left(x\right)dx=2$$

- x 從 0 積到 3，u 就從 0 積到 9；錯在表達者扣一分。 XXX，XXX
- x 從 0 積到 3，u 就從 0 積到 9；不僅錯在表達者扣三分。 XXX

NOTE

XXX 的做法雖然僅拿到 8 分，但是具有參考價值。

遇到不會做的題目就要像他這樣，可以得到不少部份分數。如下，

Find $f(x)$ such that $\int_0^9 f(x)dx=4$. So we can choose $f(x)=x-\frac{73}{18}$. Then $f(x^2)=x^2-\frac{73}{18}$.

Hence $\int_0^3 xf\left(x^2\right)dx=\int_0^3 x\left(x^2-\frac{73}{18}\right)dx=\int_0^3 x^3dx+\int_0^3\left(\frac{-73}{18}\right)xdx$

$$=\frac{1}{4}(81)+\left(\frac{-73}{36}\right)(9)=\frac{81-73}{4}=2.$$

15.3 Double Integrals over General Regions

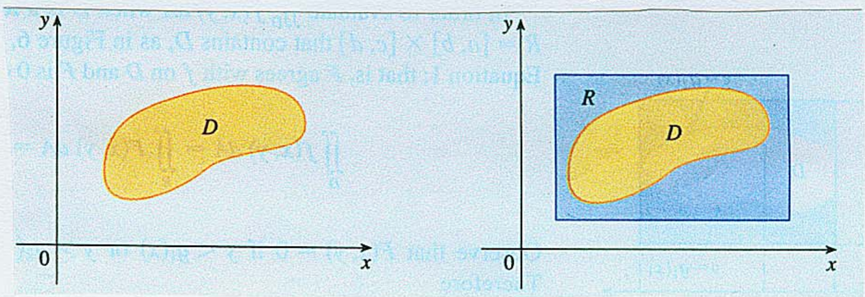
之前, double integrals over a rectangle ▨ $\iint_R f(x,y)\,dA$

現在, double integrals over a region ▨ $\iint_D f(x,y)\,dA$

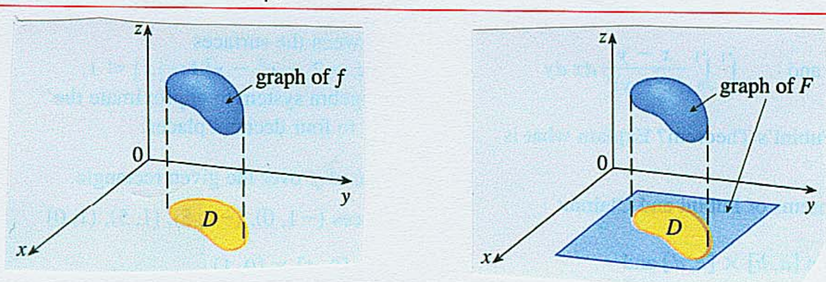
How to use $\iint_R f(x,y)\,dA$ to define $\iint_D f(x,y)\,dA$?

Suppose D is bounded and can be enclosed in a rectangle R.

1 Let $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{if } (x,y) \in D \\ 0 & \text{if } (x,y) \in R \text{ but } \notin D. \end{cases}$



2 $\boxed{\iint_D f(x,y)\,dA \overset{\text{定義}}{=} \iint_R F(x,y)\,dA \quad \text{if } \iint_R F(x,y)\,dA \text{ exists.}}$



可以証出: If ① f is continuous on D and
② the boundary curve of D is well defined,
then $\iint_R F(x,y)\,dA$ exists and hence $\iint_D f(x,y)\,dA$ exists.

和以前一樣: If $f(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in D$,
then $\iint_D f(x,y)\,dA$ represents volume (積分表示体積).

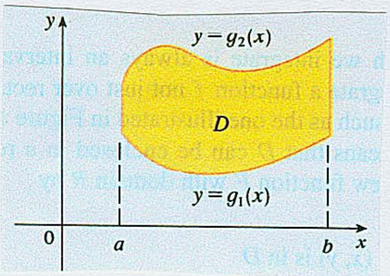
補充: $\iint_D 1\,dA$ = area of D (二重積分可以用来求出D的面積)

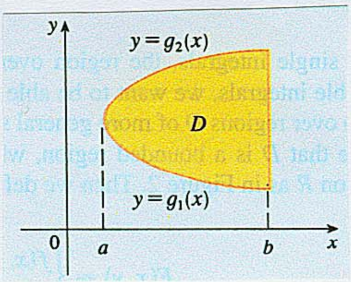
When D is of type I or II,
we know how to evaluate $\iint_D f(x,y)\,dA$.

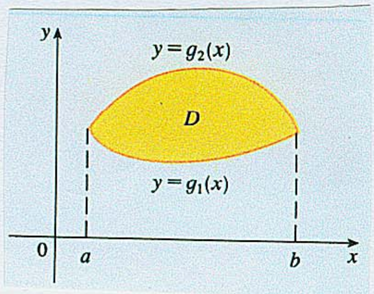
⊙ D is of type I:

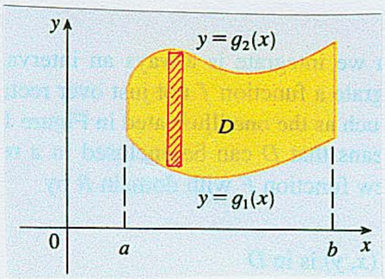
$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$ {type I 的定義}

where g_1 and g_2 are continuous on $[a,b]$.









$\boxed{3}$ If f is continuous on D and D is of type I, then

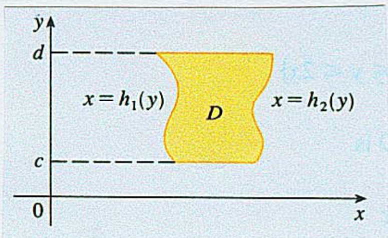
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

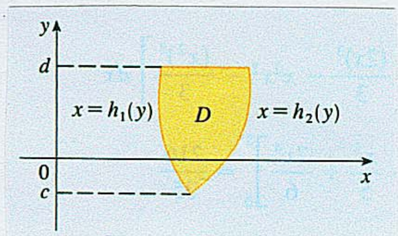
{怎麼積?}

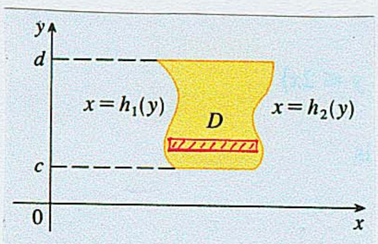
⊙ D is of type II:

$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$ {type II 的定義}

where h_1 and h_2 are continuous on $[c,d]$.







$\boxed{5}$ If f is continuous on D and D is of type II, then

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

{怎麼積?}

不會跟你說是 of type I or II, 你要自己看出來.

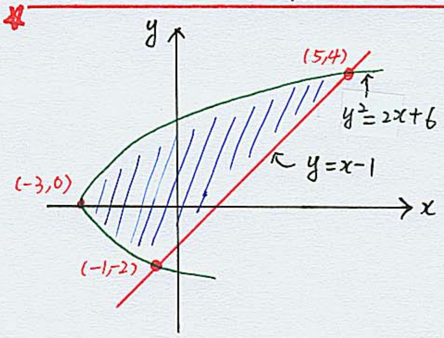
When D is of both type I and type II,
積分的難易度，可能差很多.

例13. of type I：難　of type II：易.

不要固執，一旦發現很麻煩，就要考慮換另一個 type.

例13. Evaluate $\iint_D xy\,dA$, where D is the region bounded by the line $y=x-1$ and the parabola $y^2=2x+6$.

Sol. 先畫出 D，你才能判斷是 of type I or II



一定要會求 intersection points (交點)，因為它們通常會貢獻出最上、最下、最左、最右

解 $\begin{cases} y=x-1 \\ y^2=2x+2 \end{cases}$ 可得 $(-1,-2)$, $(5,4)$.

由圖可知，需要 $y^2=2x+6$ 與 x-axis 之交點，它是 $(-3,0)$.

判斷 D 的 type

D is of both type I and type II.

But "type I" is more complicated (重要：你要看的出 type I 比較麻煩) because the lower boundary consists of two parts.

寫出 D，並積分

$D=\{(x,y)\mid -2\le y\le 4,\ \frac{y^2-6}{2}\le x\le y+1\}$

type I 時，先寫 x (左右)
type II 時，先寫 y (上下)

$$\iint_D xy\,dA=\int_{-2}^{4}\int_{\frac{y^2-6}{2}}^{y+1} xy\,dx\,dy$$

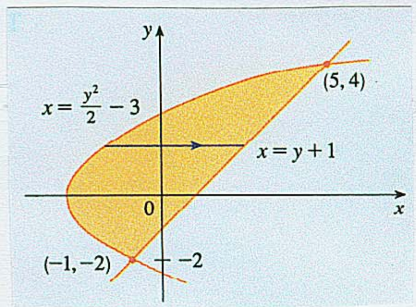
$$=\int_{-2}^{4}\left[y\frac{x^2}{2}\right]_{x=\frac{y^2-6}{2}}^{x=y+1}dy$$

$$=\int_{-2}^{4}\left(y\frac{(y+1)^2}{2}-y\frac{\left(\frac{y^2-6}{2}\right)^2}{2}\right)dy$$

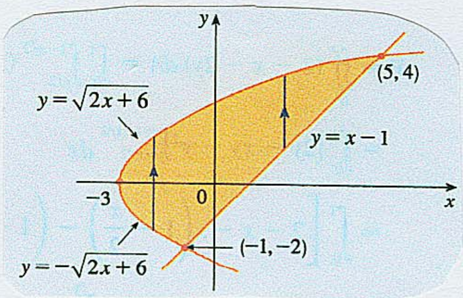
(自己補上)(一定要算過)

$=\cdots$

$=36$ ▨



如果看成 type I 呢？

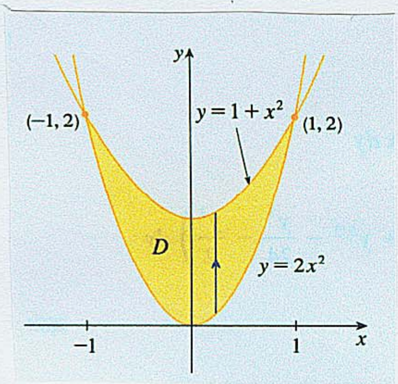


$$\iint_D xy\,dA = \int_{-3}^{-1}\int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dy\,dx$$

$$+ \int_{-1}^{5}\int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dy\,dx$$

比較不容易算出來.

例1. Evaluate $\iint_D (x+2y)\,dA$, where D is the region bounded by $y=2x^2$ and $y=1+x^2$.



Sol. • 先畫出 D

如右

intersection points are $(-1,2)$, $(1,2)$.

• 判斷 D 的 type

D is of type I. (not of type II)

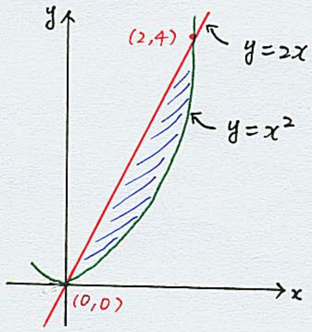
• 寫出 D, 並積分

$D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,\ 2x^2\le y\le 1+x^2\}$

$$\iint_D (x+2y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y)\,dy\,dx \underset{(一定要算過)}{\overset{(自己補上)}{=}} \cdots = \frac{32}{15}$$ ▨

例2. Find volume of the solid that lies under $z=x^2+y^2$ and above D in the xy-plane bounded by the line $y=2x$ and the parabola $y=x^2$.

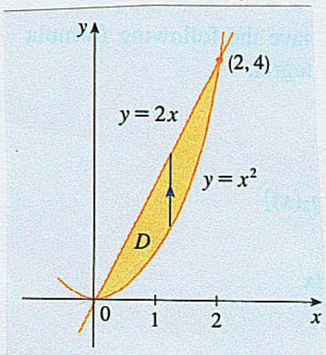
Sol. • 先畫出 D

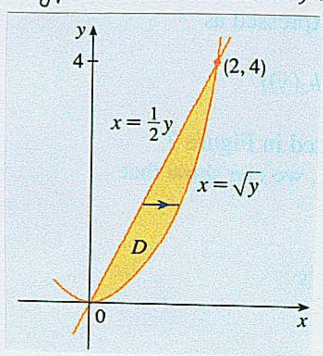


解 $\begin{cases} y=2x \\ y=x^2 \end{cases}$ 可得 intersection points $(0,0)$, $(2,4)$.

• 判斷 D 的 type

D is both of type I and type II. (難易度差不多)





• 寫出 D, 並積分 (一定要自己做一次)

看成 of type I：所求 $=\int_0^2\int_{x^2}^{2x}\underline{(x^2+y^2)}\,dy\,dx=\cdots=\frac{216}{35}$.

来自於 $z=x^2+y^2$

看成 of type II：所求 $=\int_0^4\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}\underline{(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\cdots=\frac{216}{35}$. ☒

同上

例1, 例3：积分式 $\iint_D f(x,y)\,dA$ 已經 explicitly 給你了

例2：雖然积分式沒有 explicitly 給你，但是很容易自己寫出來

例4：积分式沒有 explicitly 給你，而且要花些力氣才能寫出來，尤其 D.

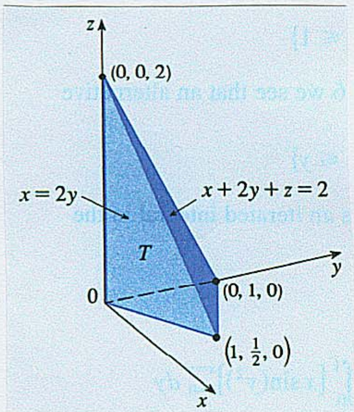
例4. Find volume of tetrahedron (四面体) bounded by the planes $x+2y+z=2$, $x=2y$, $x=0$, and $z=0$.

Sol. * 先画出 the tetrahedron

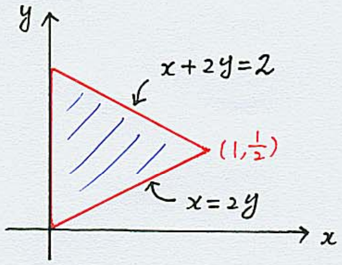
在画的过程中，你會需要求出在 xy-plane 上，$x+2y+z=2$ 和 $x=2y$ 的交點.

$z\to 0$ (∵ xy-plane)

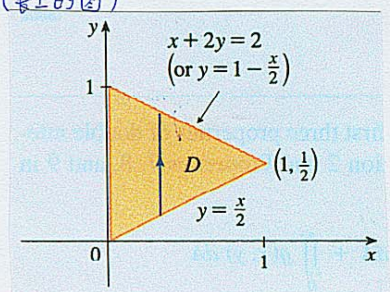
$$\begin{cases}x+2y=2\\ x=2y\end{cases}\qquad \therefore\ x=1,\ y=\frac{1}{2}$$



* 画出 D



(書上的圖)



* 判斷 D 的 type

D is of both type I and type II.

你要能看出 of type II 比較麻煩

* 寫出 D, 並積分

$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ \frac{x}{2}\le y\le 1-\frac{x}{2}\}$

所求 $=\iint_D \underline{(2-x-2y)}\,dA=\int_{-1}^{1}\int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}}(2-x-2y)\,dy\,dx=\cdots=36$ ☒

来自於 $x+2y+z=2$
很多人寫不出来！

(一定要自己做一次)

★ 例5. Evaluate $\int_0^1\int_x^1 \sin(y^2)\,dy\,dx$. 熱門考題型式

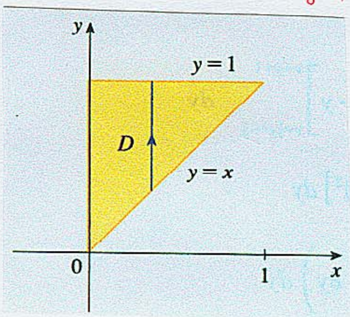
不會積，這時就要考慮換積分的順序

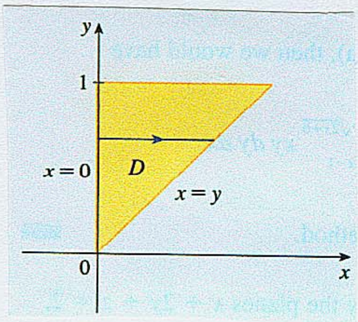
$\int\int \cdots dydx$ 換成 $\int\int \cdots dxdy$ (或者反過來)

"換積分的順序"的第1步，就是先畫出D.

D沒有那麼容易畫出，你一定要自己動手畫過.

Sol. $D=\{(x,y)\mid \underbrace{0\le x\le 1}_{\text{boundary: } x=0,\ x=1},\ \underbrace{x\le y\le 1}_{\text{boundary: } y=x,\ y=1}\}$. (如下面左图) D is of type I.





D is also of type II. (如上面右图)

$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y\}$.

所求 $=\int_0^1\int_0^y \sin(y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[x\sin(y^2)\right]_{x=0}^{x=y} dy$

$=\int_0^1 y\sin(y^2)\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\sin(y^2)\,dy^2$

$= -\frac{1}{2}\cos(y^2)\Big]_0^1 = -\frac{1}{2}(\cos 1 - 1)$ ☒

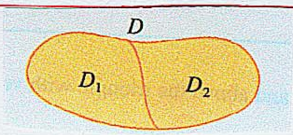
⊙ Properties (性質)

$\boxed{6}$ $\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA + \iint_D g(x,y)\,dA$

$\boxed{7}$ $\iint_D c\, f(x,y)\,dA = c\iint_D f(x,y)\,dA$

更正為≥

$\boxed{8}$ If $f(x,y)\ge g(x,y)\ \forall (x,y)\in D$, then $\iint_D f(x,y)\,dA \ge \iint_D g(x,y)\,dA$.

$\boxed{9}$ If 

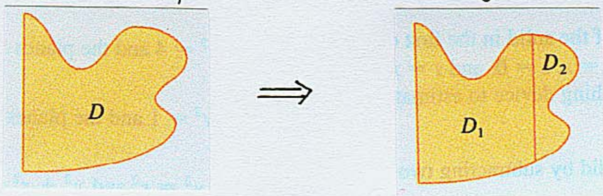
, then $\iint_D f(x,y)\,dA$

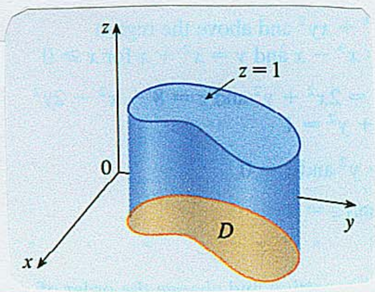
$= \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA$.

9 可以用來求 $\iint_D f(x,y)\,dA$

when D is neither type I nor type II,

but D can be expressed (表示成) regions of type I or type II.





10 $\iint_D 1\,dA = \text{area of } D$

在 D 上面对 1 積分
就等於 D 的面積

11 If $m \le f(x,y) \le M \quad \forall (x,y) \in D$, then

$$m\,(\text{area of } D) \le \iint_D f(x,y)\,dA \le M\,(\text{area of } D).$$

例6. Use 11 to estimate $\iint_D e^{\sin x \cos y}\,dA$, where D is the disk with center the origin and radius 2.

Sol. $-1 \le \sin x \le 1$, $-1 \le \cos y \le 1$

So $-1 \le \sin x \cos y \le 1$ and $e^{-1} \le e^{\sin x \cos y} \le e^{1}$.

Area of D is $\pi(2)^2 = 4\pi$.

By 11, $\dfrac{4\pi}{e} \le \iint_D e^{\sin x \cos y}\,dA \le 4\pi e$. ▨

HW 自己做,不必交 $\underbrace{3, 9, 17}_{\text{求積分}}, \underbrace{21, 27, 31}_{\text{應用題 求 volume}}, \underbrace{37, 41, 47}_{\text{換積分順序}}, 49, 51, 54.$

49: D要拆開成 $D_1, D_2, \cdots$
51: 估計
54: 画出D 並換積分順序

老師要求多做: $\underbrace{38, 39, 40, 42, 43\sim46, 48}_{\text{換積分順序}}.$